



CHƯƠNG 1: DAO ĐỘNG

BÀI 0102: PHƯƠNG TRÌNH VẬN TỐC

Nhắc lại kiến thức

- Trong quá trình dao động:
 - Khi vật chuyển động từ vị trí cân bằng ra vị trí biên là chuyển động chậm dần
 - Khi vật chuyển động từ vị trí biên về vị trí cân bằng là chuyển động nhanh dần
- Tốc độ tại vị trí biên là bằng 0 nên tốc độ tại vị trí cân bằng là cực đại

I. Phương trình vận tốc

- Phương trình li độ: $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ cm

- Phương trình vận tốc: $v = \omega A \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$ cm/s

Li độ và vận tốc của vật dao động điều hòa là những đại lượng biến thiên điều hòa theo thời gian.

Chứng minh: $v = x' = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0) = \omega A \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$

- Giá trị vận tốc: $-\omega A \leq v \leq \omega A \Rightarrow \begin{cases} v_{\max} = \omega A \\ v_{\min} = -\omega A \end{cases}$
- Độ lớn vận tốc (tốc độ): $0 \leq |v| \leq \omega A \Rightarrow \begin{cases} |v|_{\max} = \omega A \\ |v|_{\min} = 0 \end{cases}$

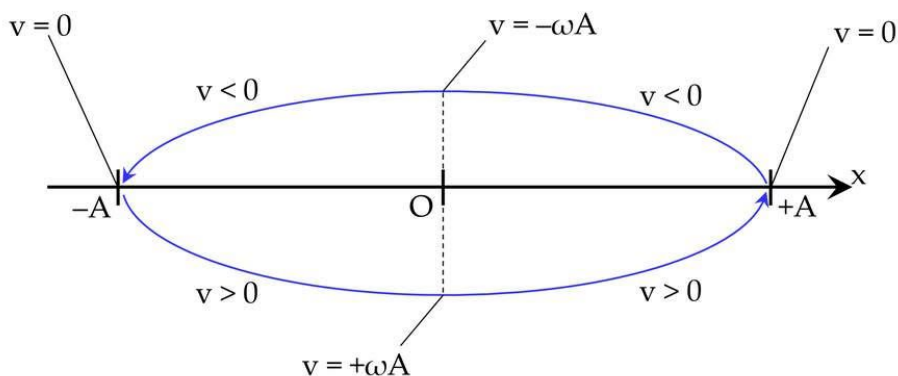
II. Nhận xét chiều chuyển động

- Trong quá trình dao động vật chuyển động qua lại quanh VTCB, ta chọn chiều dương chuyển động cho vật, có những lúc vật chuyển động theo chiều dương thì vận tốc v dương, có những lúc vật chuyển động ngược chiều dương thì vận tốc v âm.
- Xét tại 2 vị trí biên, vật có vận tốc hay tốc độ đều bằng 0 (tốc độ cực tiểu)
- Xét tại VTCB, tốc độ chuyển động của vật là cực đại, do vật có thể chuyển động theo chiều dương hoặc ngược chiều dương nên ta xét hai trường hợp:

- Khi vật qua VTCB theo chiều dương thì $|v|_{\max} = \omega A \Rightarrow v_{\max} = +\omega A$
- Khi vật qua VTCB ngược chiều dương thì $|v|_{\max} = \omega A \Rightarrow v_{\min} = -\omega A$

Vậy ta nói như sau:

- Khi vật qua VTCB thì tốc độ chuyển động là cực đại là $|v|_{\max} = \omega A$
- Khi vật qua VTCB theo chiều dương thì vận tốc là cực đại là $v_{\max} = +\omega A$
- Khi vật qua VTCB theo chiều âm thì vận tốc là cực tiểu là $v_{\min} = -\omega A$
- Khi vật qua vị trí biên dương và biên âm thì tốc độ cực tiểu $|v|_{\min} = 0$



III. Mối quan hệ giữa li độ và vận tốc

- Phương trình li độ: $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ cm

- Phương trình vận tốc: $v = \omega A \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$ cm/s

Li độ và vận tốc là những đại lượng biến thiên đều hòa theo thời gian với cùng T, f, ω .

Điểm khác nhau:

- Giá trị cực đại $x_{\max} = A$ và $v_{\max} = \omega A$
- Pha dao động khác nhau
- Vận tốc sớm pha $\pi/2$ so với li độ
- Li độ trễ pha $\pi/2$ so với vận tốc

Li độ và vận tốc biến thiên vuông pha với nhau.

Công thức độc lập thời gian (công thức vuông pha) liên hệ giữa li độ và vận tốc:

$$\boxed{\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{(\omega A)^2} = 1} \quad \text{hoặc} \quad \boxed{\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{v_{\max}^2} = 1}$$

Chứng minh:

$$\begin{cases} x = A \cos(\omega t + \varphi_0) \\ v = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{A} = \cos(\omega t + \varphi_0) \\ \frac{-v}{\omega A} = \sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases} \Rightarrow \cos^2(\omega t + \varphi_0) + \sin^2(\omega t + \varphi_0) = 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{v}{\omega A}\right)^2 = 1$$

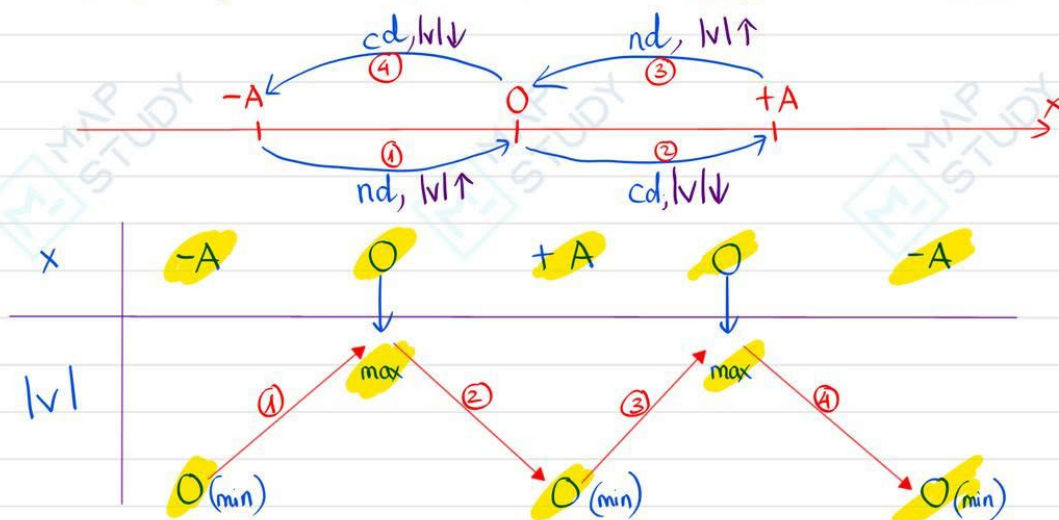
Biến đổi công thức trên ta được một vài biến thể:

$$\begin{cases} v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} \\ \omega^2 = \frac{v^2}{A^2 - x^2} \\ x^2 = A^2 - \frac{v^2}{\omega^2} \end{cases}$$

KIẾN THỨC LÝ THUYẾT

Nhắc lại :

- Tại vị trí biên, $x = \pm A$, tốc độ cắt bằng 0, $|v|_{\min} = 0$
- Khi vật đi từ VTCB ra vị trí biên; cắt chậm dần, $|v|$ giảm
- Khi vật đi từ vị trí biên về VTCB; cắt nhanh dần, $|v|$ tăng



KL: x là đại lượng biến thiên theo t/g
 v là đại lượng biến thiên theo t/g

$$v = \frac{d}{t} = \frac{x_s - x_t}{t} = \frac{\Delta x}{t} \Rightarrow v = x' \quad (\text{vận tốc là đạo hàm của li độ theo thời gian})$$

$$-\cos a = \cos(a + \pi) = \cos(a - \pi)$$

$$\begin{aligned} \cos'(ax) &= -a \sin(x) \\ \sin(a) &= \cos(a - \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

I. Phương trình vận tốc

- Pt li độ: $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ cm cos (1 góc)

- Pt vận tốc: $v = x' = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$ cm/s

$$v = -\omega A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2})$$

$-5 \leq x \leq 5$
 $0 \leq |x| \leq 5$

$$v = \omega A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

$-1 \leq \cos a \leq 1$

- Giá trị vận tốc: $-\omega A \leq v \leq +\omega A$

vận tốc cực đại: $v_{\max} = \omega A, x = \dots$
 vận tốc cực tiểu: $v_{\min} = -\omega A, x = \dots$

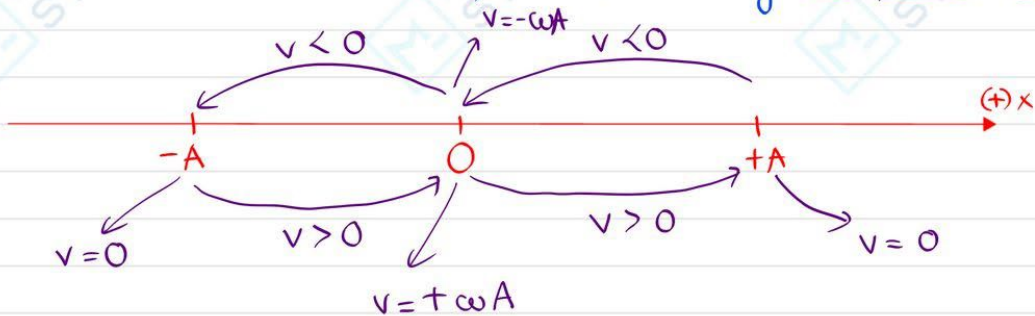
- Tốc độ: $|v|: 0 \leq |v| \leq \omega A$

tốc độ cực đại: $|v|_{\max} = \omega A; x = 0 \dots$
 tốc độ cực tiểu: $|v|_{\min} = 0; x = \pm A$

II. Nhận xét chiều chuyển động

• Khi vật đi theo chiều dương: $v > 0$; tại vị trí biên: $|v|_{\min} = 0, v = 0$

• Khi vật đi theo chiều âm: $v < 0$; tại vị trí cân bằng: $|v|_{\max} = \omega A, v = \pm \omega A$



1. Khi qua vị trí biên, tốc độ cực tiểu; vận tốc bằng 0.
 2. Khi qua vị trí cân bằng, tốc độ cực đại, vận tốc bằng ±ωA.
 3. Khi qua VTCB theo chiều dương, tốc độ cực đại, vận tốc cực đại, ωA
 4. Khi qua VTCB theo chiều âm, tốc độ cực đại, vận tốc cực tiểu, -ωA
- ngược chiều dương

Tại

Giá trị: tốc độ = |vận tốc|

III. Mối quan hệ giữa li độ và vận tốc

- Pt li độ: $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ cm $\rightarrow \varphi_x = \omega t + \varphi_0$

- Pt vận tốc: $v = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$ cm/s $\rightarrow \varphi_v = \omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$

Giống nhau: x, v là đại lượng biến thiên điều hòa theo t /gian $\left| \varphi_v - \varphi_x = \frac{\pi}{2} \right.$
 cùng ω , cùng f , cùng T

Khác nhau: $x_{\max} = A$; $v_{\max} = \omega A$, đơn vị: x : cm; v : cm/s

Pha đồng khác nhau $\begin{cases} v \text{ sớm pha } x: \frac{\pi}{2} \\ x \text{ trễ pha } v: \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \frac{\pi}{2} \rightarrow 90^\circ$

Vận tốc vuông pha li độ

- Công thức liên hệ $x-v$; công thức độc lập thời gian, công thức vuông pha

$x = A \cos(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \cos(\omega t + \varphi_0) = \frac{x}{A}$

$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

$v = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \sin(\omega t + \varphi_0) = \frac{-v}{\omega A}$

$\Rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{(\omega A)^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{x_{\max}^2} + \frac{v^2}{v_{\max}^2} = 1$

$x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = A^2 \Rightarrow \frac{v^2}{\omega^2} = A^2 - x^2 \Rightarrow v^2 = \omega^2(A^2 - x^2)$

$\Rightarrow v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$

① **Ví dụ 1: [VNA]** Một vật dao động điều hòa với phương trình $x = 10 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ cm.

- a, Viết phương trình vận tốc theo thời gian.
 b, Tìm giá trị cực đại của vận tốc.
 c, Tìm giá trị vận tốc tại thời điểm $t = 1/3$ s.

a) $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ | $x = 10 \cos(\pi t + \frac{\pi}{3})$ cm

$v = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$ | $v = 10\pi \cos(\pi t + \frac{5\pi}{6})$ cm/s

b) $v_{\max} = \omega A = 10\pi$ (cm/s) c) $v = 10\pi \cdot \cos(\pi \cdot \frac{1}{3} + \frac{5\pi}{6})$
 $= -5\pi\sqrt{3}$ cm/s

Ví dụ 2: [VNA] Một vật dao động điều hòa trên quỹ đạo dài 12 cm với tốc độ cực đại là 8π cm/s. Trong khoảng thời gian 30 s thì vật đã thực hiện được bao nhiêu dao động toàn phần.

① $L = 2A = 12 \text{ cm} \Rightarrow A = 6 \text{ cm}$, $|v|_{\max} = \omega A = 8\pi$ (cm/s)

$\Rightarrow \omega = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$ (rad/s) $\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 1,5$ (s) $\frac{30}{1,5} = 20$

$30 \text{ s} = 20T \Rightarrow 20 \text{ đđ tp}$

Ví dụ 3: [VNA] Một vật dao động điều hòa với phương trình vận tốc $v = 6\pi \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ cm/s.

- ① a, Viết phương trình li độ theo thời gian.
 b, Tìm li độ x tại thời điểm $t = 2/3$ s.
 c, Tìm độ dài quỹ đạo dao động.

$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$

$v = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$

a) $v = 6\pi \cos(2\pi t + \frac{\pi}{4})$ cm/s

$x = 3 \cos(2\pi t - \frac{\pi}{4})$ cm

b) Tại $t = \frac{2}{3}$ (s) $\Rightarrow x = 3 \cos(2\pi \cdot \frac{2}{3} - \frac{\pi}{4}) \approx -2,9$ (cm)

c) $L = 2A = 6$ cm.

⊛ **Ví dụ 4: [VNA]** Một vật dao động điều hòa với phương trình vận tốc $v = 10\pi \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$ cm/s. Tại thời điểm ban đầu $t = 0$ thì giá trị của li độ $x = 2\sqrt{3}$ cm. Tìm giá trị tần số dao động $f = \frac{\omega}{2\pi}$

$$v = 10\pi \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$x = \frac{10\pi}{\omega} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$$

tại $t = 0$; $x = 2\sqrt{3} = \frac{10\pi}{\omega} \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \omega = 2,5\pi$ (rad/s)

$\Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{5}{4}$ (Hz)

Ví dụ 5: [VNA] Một vật dao động điều hòa với biên độ A và tần số góc ω . Tại thời điểm t_1 , $x = 8$ cm và $v = 10$ cm/s. Tại thời điểm t_2 , $x = 16$ cm và $v = 5$ cm/s. Tìm giá trị của A và ω .

A ; ω ; t_1 : $x_1 = 8$ cm, $v_1 = 10$ cm/s

t_2 : $x_2 = 16$ cm; $v_2 = 5$ cm/s

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1$$

$$t_1: 8^2 \cdot \frac{1}{A^2} + 10^2 \cdot \frac{1}{\omega^2 A^2} = 1$$

$$t_2: 16^2 \cdot \frac{1}{A^2} + 5^2 \cdot \frac{1}{\omega^2 A^2} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8^2 \cdot c + 10^2 \cdot d = 1 \\ 16^2 \cdot c + 5^2 \cdot d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{A^2} = \frac{1}{320} \\ d = \frac{1}{\omega^2 A^2} = \frac{1}{125} \end{cases}$$

$\Rightarrow A = 8\sqrt{5}$ cm; $\omega = \frac{5}{8}$ rad/s

Ví dụ 6: [VNA] Một vật dao động điều hòa với tần số góc $\omega = \pi$ rad/s. Tại thời điểm t_1 , $x = 2$ cm. Tại thời điểm $t_2 = t_1 + 0,5$ s, vận tốc có giá trị là bao nhiêu?

$\omega = \pi$ rad/s; Gọi $x = A \cos(\pi t + \varphi_0)$; $v = \pi A \cos\left(\pi t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$

t_1 : $x = 2$ cm; Tại t_1 : $2 = A \cos(\pi t_1 + \varphi_0)$

$t_2 = t_1 + 0,5$ s; $v = ?$; Tại t_2 : $v = \pi A \cos\left(\pi \cdot t_2 + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$

$-\cos a = \cos(a + \pi) \Rightarrow v = \pi A \cdot \cos\left(\pi \cdot t_1 + \frac{\pi}{2} + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow v = \pi A \cdot \cos\left(\pi t_1 + \varphi_0 + \pi\right)$

$\Rightarrow v = -\pi \cdot \frac{A \cdot \cos(\pi t_1 + \varphi_0)}{2} \Rightarrow v = -2\pi$ (cm/s)

1

Ví dụ 7: [VNA] Một chất điểm dao động điều hoà có hệ thức liên hệ giữa li độ x và vận tốc v là $\frac{x^2}{4} + \frac{v^2}{16} = 4$ (trong đó, x tính bằng cm , v tính bằng cm/s). Biên độ và tần số góc dao động của chất điểm là

- A. 2 cm và 2 rad/s. **B. 4 cm và 2 rad/s.** C. 4 cm và 4 rad/s. D. 2 cm và 4 rad/s.

$$\frac{x^2}{4} + \frac{v^2}{16} = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{v^2}{64} = 1$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{(\omega A)^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} A^2 = 16 \Rightarrow A = 4 \\ (\omega A)^2 = 64 \Rightarrow \omega A = 8 \Rightarrow \omega = 2 \end{cases}$$

$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ v sớm pha $\frac{\pi}{2}$ x

Ví dụ 8: [VNA] Một vật dao động điều hoà với biên độ bằng 6 cm . Khi pha của dao động là $\frac{5\pi}{6}$ thì tốc độ dao động của vật là 60 cm/s . Chu kì của dao động này là

- A. 0,181 s. B. 0,544 s. C. 1,26 s. **D. 0,314 s.**

$\varphi_x = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \varphi_v = \varphi_x + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{3}$

$v = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$, $|v| = 60 = \omega A |\cos \frac{4\pi}{3}|$
 $\varphi_v = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \omega A = 120 \text{ (A = 6 cm)}$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{20} = 0,314\text{ s} \Rightarrow \omega = 20 \text{ (rad/s)}$

$\varphi_x = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = A \cos(\frac{5\pi}{6}) = \frac{-A\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{x}{A} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1 \Rightarrow \frac{3}{4} + \frac{60^2}{\omega^2 \cdot 6^2} = 1 \Rightarrow \omega = 20 \text{ (rad/s)}$